対称式の性質の話 （高 1～2 対象）

ひさしぶりに受験数学の話です。ブログで数式を書けなかったので画像貼り付けになっています。
興味を持っていただけましたらご覧ください。

まず今日の結論です。

> $a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}-(a+b+c)(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})+(bc+ca+ab)(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})-abc(a^n+b^n+c^n)=0$
>
> （解と係数の関係の式 $x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc=0$ と形が類似）
>
> 上記は文字数を増やしても拡張できる。4 文字なら 4 次方程式の解と係数の関係など・・・

ある問題の解答を見ていて疑問に思いました。
（問題）$a+b+c=0$ 、$a^2+b^2+c^2=1$ のとき $a^4+b^4+c^4$ の値を求めよ。
（解答）では $c=-(a+b)$ から1文字消去し 基本対称式 $a+b,\ ab$ を求めて解くというものでした。
「文字数を減らす」、「基本対象式で表す」というのは超基本なのでそれはそれでよいです。でもこの問題変なんですよね。3 文字対称式で条件が 2 つしかないのに答えが出るという。3 文字なら条件は 3 個必要なはずです。そこで3文字対称性を崩さずに解いてみて、“この問題でだけ“答えが出る理由を探すことにしました。
まず漸化式などでよくある手法で n+1 番目を n 番目から作る、というのを試してみたら、
$a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(bc+ca+ab)(a^2+b^2+c^2)+abc(a+b+c)$ …(1)
という式ができました。
問題の条件で$a+b+c=0$ なので、$(a^3+b^3+c^3)$ とabc の項が 0 となって、
$a^4+b^4+c^4=-(bc+ca+ab)(a^2+b^2+c^2)$ が得られます。

$$bc+ca+ab=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\frac{1}{2}(0^2-1)=-\frac{1}{2}$$

だから 答えは

$$a^4+b^4+c^4=-\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{2}$$

気になったのは、式(1)を ＝0 に整理すると、解と係数の関係の式と似ているんですよね。
$a^4+b^4+c^4-(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)+(bc+ca+ab)(a^2+b^2+c^2)-abc(a+b+c)=0$
もしかしたらと思って 4 文字 a,b,c,d でやってみても成立していました。もちろん 2 文字でも成立します。
3 文字だと
$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}-(a+b+c)(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})+(bc+ca+ab)(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})-abc(a^n+b^n+c^n)=0$
が成り立つんじゃないかと予想しました。
方程式は因数分解型と解と係数の関係を使って展開形式の両方で表せるので、
3 次方程式の解と係数の関係から
$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc$ と表せて
これに $x=a,b,c$ を代入すると それぞれ$(x-a)$、$(x-b)$、$(x-c)$ が0になり、

$0 = a^3 - (a+b+c)a^2 + (bc+ca+ab)a - abc$
$0 = b^3 - (a+b+c)b^2 + (bc+ca+ab)b - abc$
$0 = c^3 - (a+b+c)c^2 + (bc+ca+ab)c - abc$
それぞれの両辺に a^n、b^n、c^n をかけて足し合わせると
$a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3} - (a+b+c)(a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) + (bc+ca+ab)(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) - abc(a^n + b^n + c^n) = 0$ ・・・（＊）
になります。
同じ考え方で m個の文字でも m次方程式の解と係数のような関係式を作ることができます。
ということで一般論までたどり着きました。

冒頭の問題は 3 文字で$n = 1$ のときです。この問題の条件ではたまたま $a + b + c = 0$ なので、 $a^3 + b^3 + c^3$とabc がわからなくてもこの項が 0 となって答えが出てしまうという仕組みでした。これで当初の疑問は解決しました。

ちなみに高校 1 年の因数分解公式で一番ややこしいヤツは↓ですが
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$
これって、確かに展開したらその通りになるけどなぜこんな式が導出されたのか、ずっと不思議に思っていました。実は上の結論(*)に $n = 0$ を入れたものだったのですね。
数十年ぶりに謎が解けてスッキリしました。

なお今回の式は教科書や参考書には載っていないと思います。と思ったら、数学の先生がブログで紹介されていました。今回の結果をもっと一般化した「ニュートンの恒等式」「ジラールｰニュートンの公式」という式があるようです。
対称式の問題って基本対象式一辺倒だとけっこう苦戦することがあります。知っておいたら少し得をするかもしれませんね。しかし院長はもう受験しないから今さら役に立たんけど。 （院長）2022.6.8