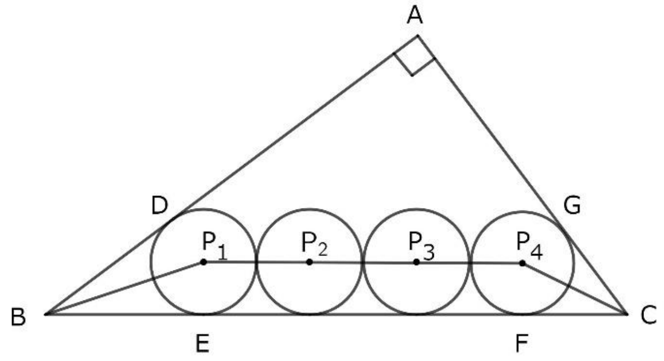
まきの内科クリニック　ブログ　2024.1.7

整数比直角三角形と tan2 倍角の秘密

　院長は、昔長いこと中学数学を教えていた時期がございまして、その頃の中学の図形分野は、現在でいう高校数学 A の内容まで入っていて、今より難しかったと記憶しております。そのころの定番だった問題です。




　(問題)AB＝4、BC=5、CA=3、の直角三角形内に、図のように半径が等しい 4 つの円を内接させるとき、円の半径 r を求めよ。

　(昔からある解法)△ABC の面積は△$ABP_1$＋△$AP_1P_4$＋△$ACP_4$＋台形 $P_1BCP_4$ で表せるので～～ と解く。いまでもこの面積でやる解き方が延々と載ってるんですよ、古くさいなあ～！この解き方結構めんどくさいんですよ。でもね、本当はもっと本質を突いた解法があるのです。

　(別解)BC=BE＋EF＋FC=<u>3r</u>＋6r＋<u>2r</u>＝11r と表せる。BC=5なので 11r=5⇒r=5/11、

　知ってる人にとっては瞬殺問題です。 えっ？何で BE=3r、FC=2r になるん？と思われた方、次をご覧ください。

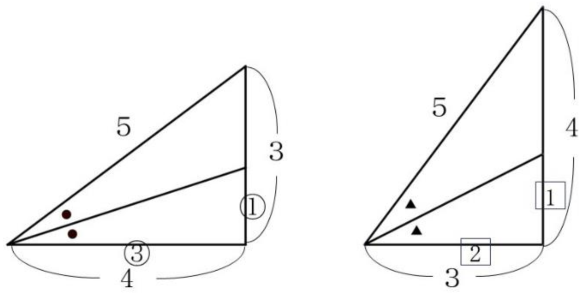
　(解説)内接円の中心は三角形の角の二等分線上にある。$BP_1$ の延長と AC の交点を M とすると、△$BEP_1$∽△BMA から BE：$P_1E$＝BA:AM である

　角の二等分線定理から AM：CM＝BA：BC＝4:5 ⇒AM＝AC×4/(4＋5)=3×4/9

　よって BA:AM＝4: (3×4/9)=3:1 ⇒ BE：$P_1E$=3:1⇒BE=3r です

　同様に CP4 の延長と AB の交点を N として角の二等分線定理を使って CA:AN＝2:1 が求まり、CF=2r である。

　<u>3：4：5の直角三角形で、鋭角内角の二等分線を引くと 1:2 と 1:3 の直角三角形が現れる、</u>ということです。3:4:5直角三角形って頻出なのでこれは覚えておいて損はないと思います。




　中学範囲なら角の二等分線定理を使い手計算で導出するまでできれば十分だと思います。図で実際に計算して1:3と1:2が現れることを確認してください。

　高校生なら、実はこれが tan の加法定理（今の場合は 2 倍角定理）で、tan θ =1/3、1/2 のとき tan2 θ が 3/4 と 4/3 になるってことまで連想していただけると、深みが増すのです。

　加法定理　$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　ここで　$\alpha,\beta=$を $\theta$ とおいて

　倍角定理　$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$　　⇒　$\tan\theta$ に 1/3、1/2 を代入する

　これね、他の整数比直角三角形でも同じようにしてみると、角の二等分線を引くとシンプルな比が出てくるんですよね

　5:12:13　⇒　5:1 と 3:2

　8:15:17　⇒　4:1 と 5:2

　何でこんなことになるかと言うと、整数比直角三角形の比ってピタゴラス数と呼ばれていて

$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2 \quad (m>n)$

で作れる整数なんですけど（全ての整数比直角三角形はこの形で表せることがわかっています、証明はネットで調べてください）、

tan2 θ = $\frac{2mn}{m^2-n^2}$　とおいて、分母分子を　$m^2$　で割ると、まるっきり tan の倍角公式が現れてきます。　$\tan\theta=$n/m　　がすぐに導けます。

3:4:5　　⇒　(m, n)= (2,1)と(3,1)

5:12:13　⇒　(m, n)= (5,1)と(3,2)

8:15:17　⇒　(m, n)=(4,1)と(5,2)　というわけだったのです

　何てことはないのですが面白い性質です。むしろ問題を作る側はこの知識を背景にして数値設定しているはずです。そうでないと結果がキタナイ数値（複雑な√だったり、約分できない膨大な分数など）になるからなんですね。3:4:5 で出題しておけば、半角にしてもきれいな整数比なので受験生に計算の負担を強いない「出題しやすい」問題になるのです。

まとめ、(1)内接円が出てきたら角の二等分線定理を使って、辺の比を計算するとうまくできることがある、(2)3:4:5 の直角三角形で角の二等分線が出てきたら 1:2 と 1:3 が隠れている、(3)逆に 1:2 や 1:3 の倍角が出てきたら 3:4:5 が隠れている。

この方法はほとんどの参考書や問題集に載っていないとおもいます。覚えていると見通しが良くなったり、何より計算短縮になりますので、いつかどこかで得になるでしょう。(参考問題 2013 年センター試験数 IA 第 3 問)

もうすぐ共通テストですね、そして大学二次試験、高校入試もやってきます。受験生の皆様がんばってください。あなたの頭上に数学の神様が降りてきますように！ (2024.1.7 院長)